

Hoofstuk 4

ALGEBRAÏESE VERGELYKINGS

Gelyktydige Lineêre Vergelykings

GELYKTYDIGE LINEÊRE VERGELYKINGS

- Tot dusver het die vergelykings waarmee jy werk slegs EEN veranderlike bevat. Met kwadratiese vergelykings het jy wel twee oplossings of wortels gekry, maar daar was steeds net EEN veranderlike.
- As 'n vergelyking twee onbekende waardes bevat (bv. x en y), word 'n vergelykingspaar (twee vergelykings) gebruik om die waardes te bepaal.
- Omdat jy gelyktydig met albei vergelykings werk, word hulle gelyktydige vergelykings genoem.
- Daar is twee Algebraïese metodes om gelyktydige vergelykings op te los:

Substitusie

Eliminasie

SUBSTITUSIE

Stappe:

1. Nommer die vergelykings (1) en (2).
2. Kies die maklikste vergelyking en herskryf dié vergelyking, sodat een van die veranderlikes die onderwerp is. (Met ander woorde – alleen staan aan die linkerkant van die gelykaanteken.)
3. Vervang die regterkant van die vergelyking wat herrangskik is in die ander vergelyking in –
MOET NOU NET EEN VERANDERLIKE HÊ.
4. Los die nuwe vergelyking op.
5. Vervang die waarde wat verkry word in enige van die twee vergelykings om die waarde van die ander veranderlike te kry.

VOORBEELDE

1. Los op vir x en y in $x + y = 1$ en $x - y = 5$.

Stap 1: $x + y = 1$ (1)

$x - y = 5$ (2)

Nommer die vergelykings (1) en (2).

Stap 2: $x = 5 + y$ (3)

Nommer die vergelyking wat jy herskryf (3).

[Jy kan ook (1) herskryf het; dit kom daarop neer dat jy

die metode kan toepas en wiskundig reg werk – Pasop vir tekenfoute!!!]

Stap 3: Vervang (3) in (1).

$5 + y + y = 1$

[Jy kan nie die vergelyking wat jy herskryf het, terugvervang in homself nie.]

[Onthou; in beide vergelykings het x en y dieselfde waardes.]

Stap 4: $5 + 2y = 1$

$2y = 1 - 5$

Los die vergelyking op – Bepaal die waarde van y .

$2y = -4$

$y = -2$

Stap 5: Vervang $y = -2$ in (1)

[Jy kan ook $y = -2$ in (2) of (3) in vervang.]

$$x + (-2) = 1$$

$$x - 2 = 1$$

$$x = 1 + 2$$

$$x = 3$$

$$\therefore x = 3 \text{ en } y = -2$$

Nota:

Gelyktydige vergelykings is 'n splinternuwe konsep wat jy moet leer, so dit gaan vir jou vreemd wees en jy mag moontlik voel dit maak glad nie sin nie. Werk egter deur die volgende twee voorbeelde en PROBEER!

Met gelyktydige vergelykings gaan ons stappe ook nie noodwendig dieselfde wees nie, omdat ons moontlik verskillende vergelykings gebruik by verskillende stappe. As jy egter die vergelykings korrek herskryf, in vervang, tekenfoute vermy en die berekeninge korrek uitvoer sal jy dieselfde waardes vir die veranderlikes kry.

2. Los op vir x en y in $x + 3y = 5$ en $2x - 6y = 2$.

Stap 1: $x + 3y = 5$ (1)

$$2x - 6y = 2 \quad (2)$$

Nommer die vergelykings (1) en (2).

Stap 2: $x = 5 - 3y$ (3)

Nommer die vergelyking wat jy herskryf (3).

[Ek kies (1) omdat dit minder berekeninge verg om x alleen te kry.]

Stap 3: Vervang (3) in (2).

[Jy kan nie die vergelyking wat jy herskryf het, terugvervang in homself nie.]

$$2(5 - 3y) - 6y = 2$$

[Onthou; in beide vergelykings het x en y dieselfde waardes.]

Stap 4: $2(5 - 3y) - 6y = 2$

Los die vergelyking op – Bepaal die waarde van y .

$$10 - 6y - 6y = 2$$

$$10 - 12y = 2$$

Stap 5: Vervang $y = \frac{2}{3}$ in (1)

$$-12y = 2 - 10$$

$$x + 3\left(\frac{2}{3}\right) = 5$$

$$\therefore x = 3 \text{ en } y = \frac{2}{3}$$

$$-12y = -8 \quad y = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$x + 2 = 5$$

$$x = 3$$

3. Los op vir x en y in $2y - 3x = -21$ en $2x + 3y = 1$.

Stap 1: $2y - 3x = -21$ (1)

$$2x + 3y = 1 \quad (2)$$

Nommer die vergelykings (1) en (2).

Stap 2: $2x = 1 - 3y$

Nommer die vergelyking wat jy herskryf (3).

$$x = \frac{1}{2} - \frac{3y}{2} = \frac{1-3y}{2} \quad (3)$$

SOMTYDS GAAN JY MET BREUKE MOET WERK.

Stap 3: Vervang (3) in (1).

[Jy kan nie die vergelyking wat jy herskryf het, terugvervang in homself nie.]

$$2y - 3\left(\frac{1-3y}{2}\right) = -21$$

[Onthou; in beide vergelykings het x en y dieselfde waardes.]

Stap 4: $2y - \frac{3}{1}\left(\frac{1-3y}{2}\right) = -21$

Los die vergelyking op – Bepaal die waarde van y .

$$2y - \frac{3+9y}{2} = -21$$

3 is 'n heelgetal en moet dus maal met elke term in die teller.

Onthou: $\frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$

Stap 4: $2y - \frac{3}{1} \left(\frac{1-3y}{2} \right) = -21$

$$2y - \frac{3+9y}{2} = -21$$

$$\text{KGV} = 2$$

$$4y - 3 + 9y = -42$$

$$13y = -42 + 3$$

$$13y = -39$$

$$y = -3$$

Stap 5: Vervang $y = -3$ in (2)

$$2x + 3(-3) = 1$$

$$2x - 9 = 1$$

$$2x = 1 + 9$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

Los die vergelyking op – Bepaal die waarde van y .

3 is 'n heelgetal en moet dus maal met elke term in die teller.

Onthou: $\frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$

Maal elke term met 2; jy wil ontslae raak van die breuk.

$\therefore x = 5$ en $y = -3$

ELIMINASIE

Stappe:

1. Nommer die vergelykings en rangskik die vergelykings in dieselfde orde.
2. Sorg dat die koëffisiënte van een van die veranderlikes dieselfde is – jy kan een van die vergelykings met 'n faktor vermenigvuldig of deel om die koëffisiënte van die veranderlike dieselfde te kry.
3. Tel die vergelykings bymekaar of trek hulle af om ontslae te raak van die veranderlike.
4. Vervang die waarde wat bepaal is in een van die twee vergelykings om die ander veranderlike se waarde te bepaal.

(Nie alle vergelykings is altyd geskik vir Eliminasië nie, merendeels word die metode van Substitusie gebruik.)

VOORBEELDE

1. Los op vir x en y in $3x + 4y = 5$ en $3x + y = 8$.

Stap 1: $3x + 4y = 5$ (1)

$3x + y = 8$ (2)

Nommer die vergelykings (1) en (2).

Stap 2: **Let op dat die koëffisiënt van x in beide vergelykings 3 is.**

Dus kan ons die twee vergelykings van mekaar aftrek.

Stap 3: (1) – (2)

Dit kan ook wees (2) – (1).

$$3x + 4y = 5$$

$$-(3x + y = 8)$$

$$3x + 4y = 5$$

$$-3x - y = -8$$

$$3y = -3$$

$$y = -1$$

$$3x - 3x = 0$$

\therefore Val die x weg.

Stap 4: Vervang $y = -1$ in (1)

$$3x + 4(-1) = 5$$

$$3x - 4 = 5$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

2. Los op vir x en y in $x + 4y = 14$ en $3x + 2y = 12$.

Stap 1: $x + 4y = 14$ (1)

$3x + 2y = 12$ (2)

Nommer die vergelykings (1) en (2).

Stap 2: Hier het jy twee opsies: Jy kan (1) maal met 3 dan is beide die koëffisiënt van x 3 of jy kan (2) met 2 maal dan is beide die koëffisiënt van y 4.

(1) x 3 : $3x + 12y = 42$ (3)

Stap 3: (3) – (2) Dit kan ook wees (2) – (3).

$3x + 12y = 42$

$-(3x + 2y = 12)$

$3x + 12y = 42$

$-3x - 2y = -12$

$10y = 30$

$y = 3$

$3x - 3x = 0$

\therefore Val die x weg.

Stap 4: Vervang $y = 3$ in (1)

$x + 4(3) = 14$

$x + 12 = 14$

$x = 14 - 12$

$x = 2$

3. Los op vir x en y in $5x + 4y = 22$ en $x + y = 4$.

Stap 1: $5x + 4y = 22$ (1)

$x + y = 4$ (2)

Nommer die vergelykings (1) en (2).

Stap 2: Hier het jy twee opsies: Jy kan (2) maal met 5 dan is beide die koëffisiënt van x 5 of jy kan (2) met 4 maal dan is beide die koëffisiënt van y 4.

(2) x 4 : $4x + 4y = 16$ (3)

Stap 3: (1) – (3) Dit kan ook wees (3) – (1).

$5x + 4y = 22$

$-(4x + 4y = 16)$

Stap 4: Vervang $x = 6$ in (2)

$5x + 4y = 22$

$4y - 4y = 0$

$6 + y = 4$

$-4x - 4y = -16$

\therefore Val die y weg.

$y = 4 - 6$

$x = 6$

$y = -2$

GRAFIESE OPLOSSING

- Gelyktydige vergelykings kan ook grafies opgelos word.
- Dit behels dat 2 reguitlyn-grafieke volgens skaal geskets word.
- Die koördinate van die snypunt gee die waardes van x en y .
- Bv. Bestudeer die skets na regs...

Twee vergelykings:

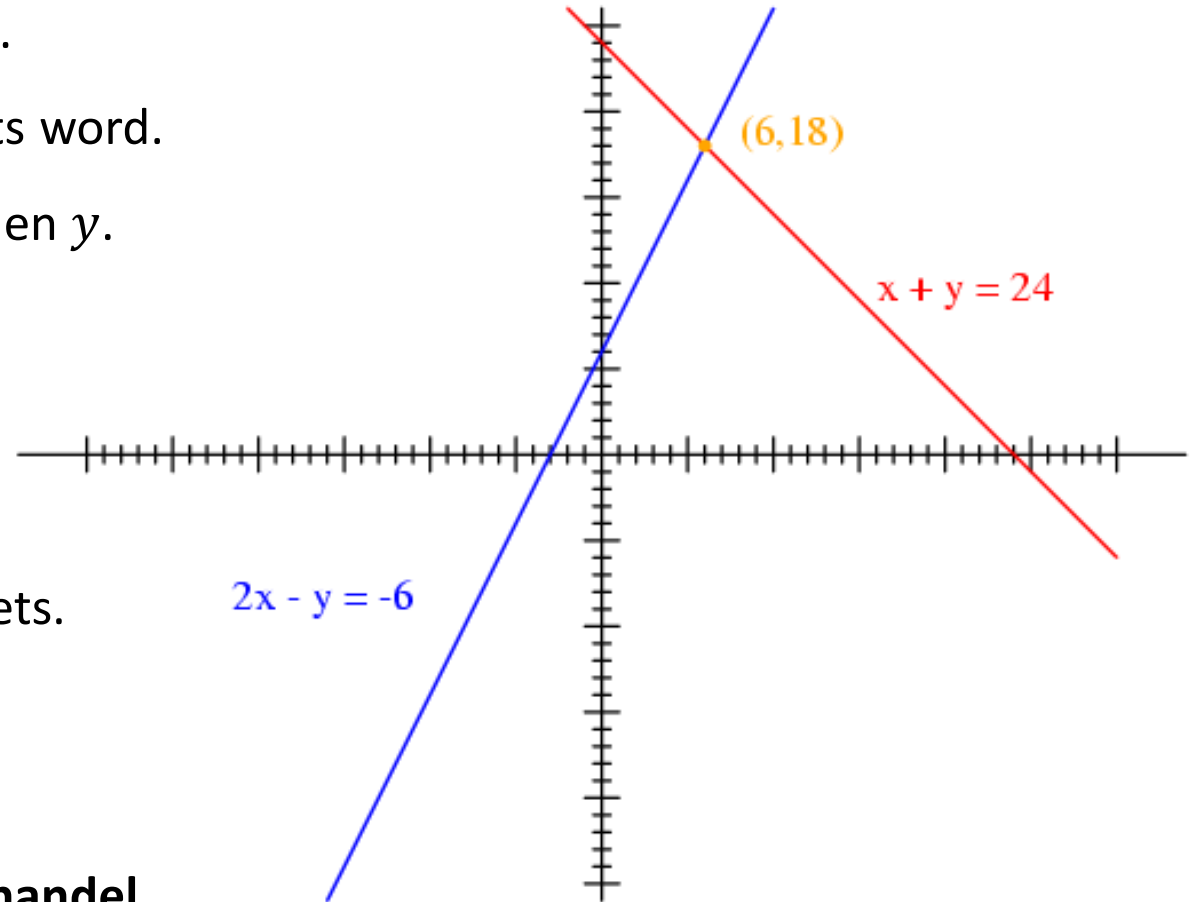
$$x + y = 24 \quad 2x - y = -6$$

Die ooreenstemmende reguitlyn-grafieke is geskets.

Koördinate van die snypunt is $(6 ; 18)$

$$\therefore x = 6 \text{ en } y = 18$$

- **Meer hieroor wanneer ons Analitiese Meetkunde behandel.**



Hoofstuk 4

ALGEBRAÏESE VERGELYKINGS

LINEÊRE ONGELYKHEDE

LINEÊRE ONGELYKHEDE

- Met lineêre ongelykhede volg jy dieselfde reëls wat geld met lineêre vergelykings. .
- **BAIE BELANGRIK:** Wanneer jy egter deel met 'n negatief, swaai die ongelykheidsteken om.

Rede: $2 < 4$

MAAR

$-2 > -4$

- Die oplossings van ongelykhede kan grafies voorgestel word op 'n getallelyn.
(Onthou van Intervalnotasie...)

VOORBEELDE

1. $2(x - 3) > 2x - 3(x - 4)$

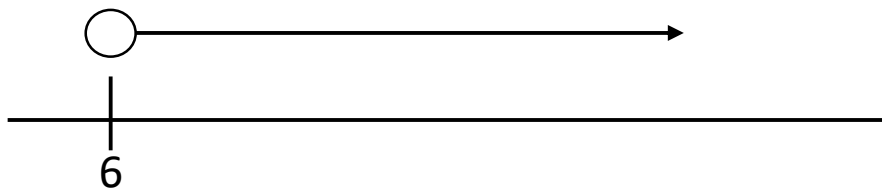
$$2x - 6 > 2x - 3x + 12$$

$$2x - 2x + 3x > 12 + 6$$

$$3x > 18$$

$$x > 6$$

Grafiese voorstelling:



Raak ontslae van die hakkies, deur die koëffisiënt van die hakkie in te maal – Distributiewe Wet.

Neem die terme met x na die LK en die konstante na die RK. Indien 'n term oor die ongelijkheidsteken beweeg, verander sy teken.

Deel beide kante met 3.

x is 'n element van reële getalle.

Oop kolletjie want 6 is nie ingesluit nie ($>$)

$$2. \quad 3(x - 2) - (4x + 1) < -3$$

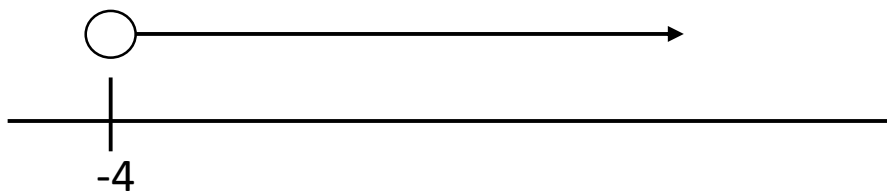
$$3x - 6 - 4x - 1 < -3$$

$$3x - 4x < -3 + 6 + 1$$

$$-x < 4$$

$$x > -4$$

Grafiese voorstelling:



Raak ontslae van die hakkies, deur die koëffisiënt van die hakkie in te maal – Distributiewe Wet.

Onthou van Spokie 1 voor 'n hakkie.

Neem die terme met x na die LK en die konstante na die RK. Indien 'n term oor die ongelijkheidsteken beweeg, verander sy teken.

Deel beide kante met -1.

DIE ONGELYKHEIDSTEKEN MOET OMDRAAI.

x is 'n element van reële getalle.

Oop kolletjie want -4 is nie ingesluit nie (>)

$$3. \quad 3 - \frac{x}{2} \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{KGV} = 6$$

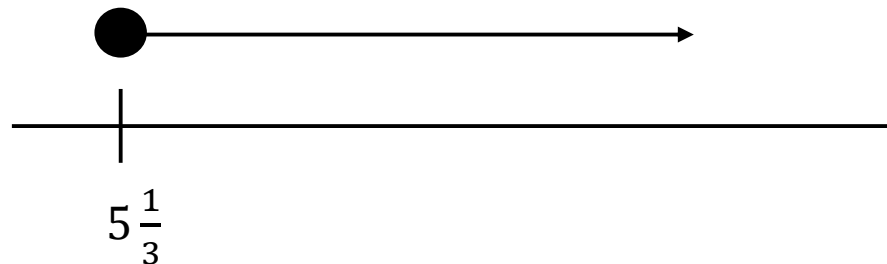
$$18 - 3x \leq 2$$

$$-3x \leq 2 - 18$$

$$-3x \leq -16$$

$$x \geq \frac{16}{3}$$

Grafiese voorstelling:



Maal elke term met 6; wil van die breuk ontslae raak

Neem die terme met x na die LK en die konstante na die RK. Indien 'n term oor die ongelijkheidsteken beweeg, verander sy teken.

Deel beide kante met -3.

DIE ONGELYKHEDSTEKEN MOET OMDRAAI.

x is 'n element van reële getalle.

Toe kolletjie want $\frac{16}{3}$ of $5\frac{1}{3}$ is ingesluit (\geq)

$$4. \quad \frac{4-x}{2} - \frac{2x-1}{3} > x - 2$$

$$\text{KGV} = 6$$

$$3(4-x) - 2(2x-1) > 6(x-2)$$

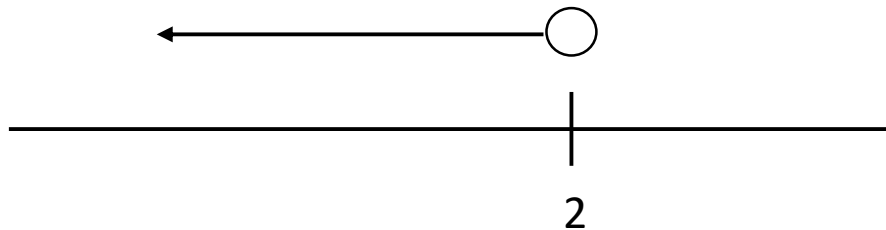
$$12 - 3x - 4x + 2 > 6x - 12$$

$$-3x - 4x - 6x > -12 - 12 - 2$$

$$-13x > -26$$

$$x < 2$$

Grafiese voorstelling:



Maal elke term met 6; wil van die breuke ontslae raak

$$\frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ en } \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

Raak ontslae van die hakkies – maal koëffisiënt in.

Alle terme met x na die LK en konstantes na die RK.

Indien 'n term oor die ongelijkheidsteken beweeg, verander teken.

Deel beide kante met -13.

DIE ONGELYKHEIDSTEKEN MOET OMDRAAI.

x is 'n element van reële getalle.

Oop kolletjie want 2 is nie ingesluit nie (<)

Met die vier voorafgaande voorbeelde is x slegs van een kant af beperk. In die volgende voorbeelde word x van beide kante af beperk. Jy benader die ongelijkheid steeds op dieselfde wyse, jy gaan nou net jou x alleen in die middel wil hê en dieselfde berekening moet aan albei kante van die ongelijkheidsteken gedoen word.

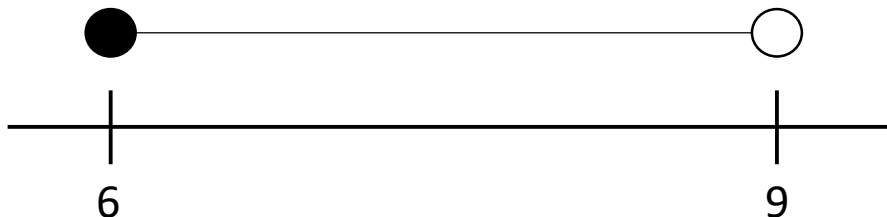
5. $-2 \leq x - 8 < 1$
 $-2 + 8 \leq x < 1 + 8$

$$6 \leq x < 9$$

Die agt beweeg nou na links en regs oor die ongelijkheidsteken en moet dit +8 word –
SELFDE BEREKENING AAN LK EN RK.

Dit lees as volg: x is groter en gelyk aan 6 en kleiner as 9.

Grafiese voorstelling:



x is 'n element van reële getalle.

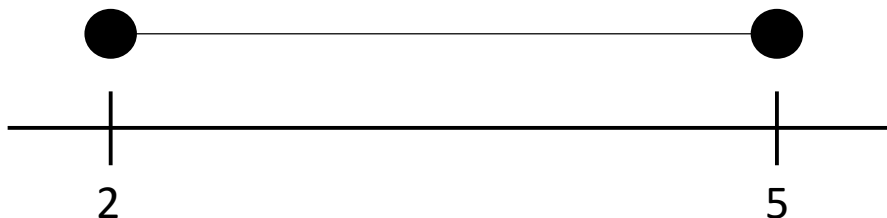
Toe kolletjie want 6 is ingesluit (\leq) en oop kolletjie want 9 is uitgesluit ($<$).

6. $-1 \leq 2x - 5 \leq 5$
 $-1 + 5 \leq 2x \leq 5 + 5$

$$4 \leq 2x \leq 10$$

$$2 \leq x \leq 5$$

Grafiese voorstelling:



Die vyf beweeg nou na links en regs oor die ongelijkheidsteken en moet dit +5 word – **SELFDE BEREKENING AAN LK EN RK.**

Die koëffisiënt van x is 2, dus deel elke term met 2.

Dit lees as volg: x is groter en gelyk aan 2 en kleiner en gelyk aan 5.

x is 'n element van reële getalle.

Toe kolletjie want 2 is ingesluit (\leq) en toe kolletjie want 5 is ingesluit (\leq).

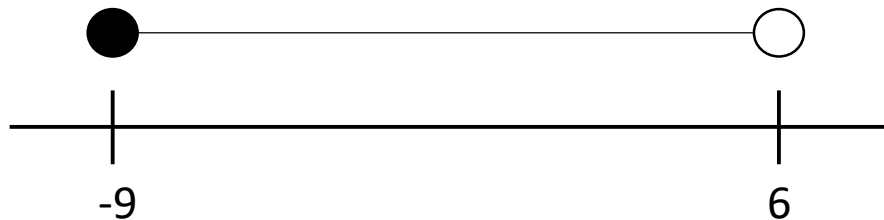
$$7. \quad -1 \leq 2 + \frac{m}{3} < 4$$

$$-1 - 2 \leq \frac{m}{3} < 4 - 2$$

$$-3 \leq \frac{m}{3} < 2$$

$$-9 \leq m < 6$$

Grafiese voorstelling:



Die twee beweeg nou na links en regs oor die ongelijkheidsteken en moet dit -2 word – SELFDE BEREKENING AAN LK EN RK.

Die KGV = 3, maal elke term met 2.

Dit lees as volg: m is groter en gelyk aan -9 en kleiner as 6.

x is 'n element van reële getalle.

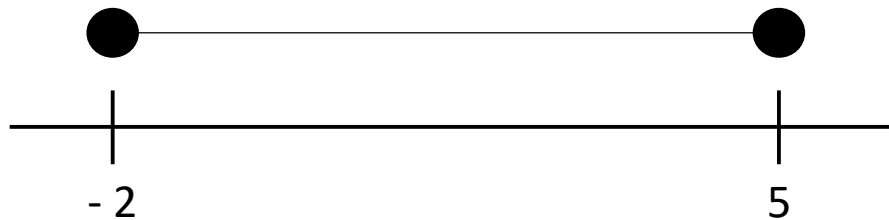
Toe kolletjie want -9 is ingesluit (\leq) en oop kolletjie want 6 is uitgesluit ($<$).

8. $-2 \leq 3 - x \leq 5$
 $-2 - 3 \leq -x \leq 5 - 3$

$$-5 \leq -x \leq 2$$
$$5 \geq x \geq -2$$

$$-2 \leq x \leq 5$$

Grafiese voorstelling:



Die drie beweeg nou na links en regs oor die ongelijkheidsteken en moet dit -3 word – SELFDE BEREKENING AAN LK EN RK.

Die formaat is egter vreemd, want wanneer x van beide kante beperk word skryf ons die bekkies so dat dit na regs oop is. Kan egter die uitdrukking herskryf: x is steeds groter en gelyk aan -2 en kleiner en gelyk aan 5.

x is 'n element van reële getalle.

Toe kolletjie want -2 is ingesluit (\leq) en toe kolletjie want 5 is ingesluit (\leq).

VERGELYKINGS

WERKKAART 2

WERKKAART 3